

Лекция 3

Тема Колебательные системы

1 Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений

Последовательным колебательным контуром называют такую цепь, в которой катушка и конденсатор соединены последовательно относительно входных зажимов (рисунок 24). В такой цепи можно наблюдать резонанс напряжений. При резонансе напряжений индуктивное и емкостное сопротивления взаимно компенсируются и в результате этого реактивные сопротивление и мощность цепи равны нулю.

При резонансе напряжений, возникающем в цепи с последовательным соединением индуктивных и емкостных элементов, ток и напряжение цепи совпадают по фазе. В этом случае угол сдвига фаз между током и напряжением равен нулю ($\varphi = 0$) и полное сопротивление цепи равно ее активному сопротивлению. Если $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$, то угол $\varphi = 0$ при $X = 0$.

Следовательно, при резонансе $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$ и $X_L - X_C = 0$ или $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, откуда угловая частота при резонансе $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и резонансная частота $f_0 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})}$.

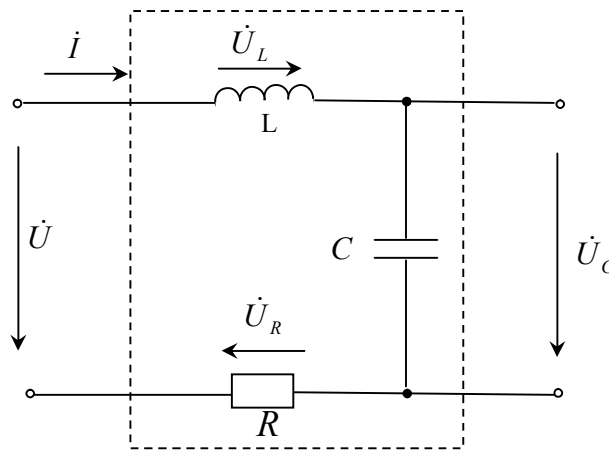


Рисунок 24 – Последовательный колебательный контур

Таким образом, условием возникновения резонанса напряжения в цепи является равенство реактивных сопротивлений $X_L = X_C$, так как в этом случае частота колебательного контура ω_0 равна частоте сети, питающей данную цепь.

Мгновенные значения энергии магнитного и электрического поля соответственно запишутся

$$W_L = \frac{Li^2}{2}; \quad W_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

Т. е. в электрической цепи происходит непрерывное перераспределение энергии магнитного и электрического полей, суммарное значение которой постоянно. Вся энергия, поступающая от источника в момент резонанса расходуется в сопротивлении R .

Отношение напряжения на индуктивности или емкости к напряжению, приложенному к цепи при резонансе, называют добротностью контура или коэффициентом резонанса.

$$Q_L = \frac{U_L}{U} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}; \quad Q_C = \frac{U_C}{U} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR};$$

$$Q_L = Q_C = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R},$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое (волновое) сопротивление контура.

Относительной расстройкой частоты по отношению к резонансной частоте контура называют величину: $\delta = \omega - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1$.

Величину обратную добротности называют коэффициентом затухания контура:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}.$$

Полное сопротивление цепи минимально при резонансе напряжений, при этом ток в цепи достигает максимального значения.

Полосу частот вблизи резонанса (рисунок 25), на границах которой ток снижается до $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ максимального значения I_0 принято называть полосой пропускания резонансного контура $2\Delta f = |f_2 - f_1|$, где f_1, f_2 – нижняя и верхняя граничная частота.

Величина добротности Q характеризует остроту резонансной кривой (рисунок 26).

Внутреннее сопротивление источника ЭДС R_i влияет на добротность и полосу пропускания колебательного контура. Чем больше R_i , тем ниже добротность и шире полоса пропускания.

В условиях близких к резонансу, напряжения U_L и U_C могут быть большими.

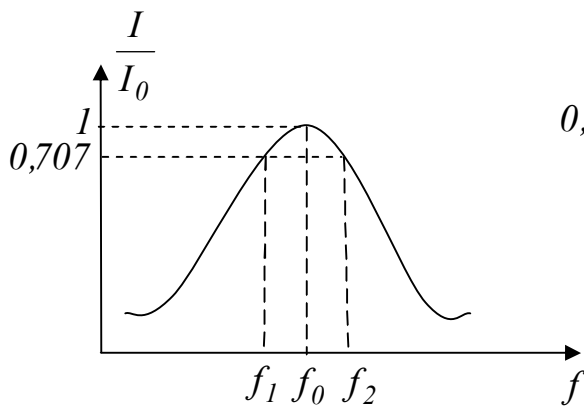


Рисунок 25 – Полоса пропускания резонансного контура

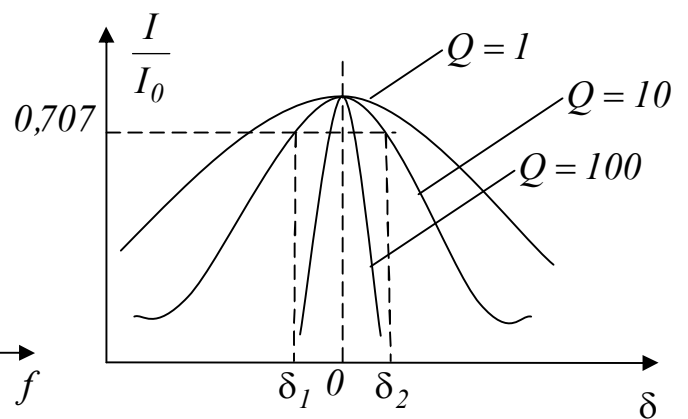


Рисунок 26 – Величина добротности

Векторная диаграмма тока и напряжения при резонансе напряжений представлена на рисунке 27.

Зависимость напряжений на емкости и индуктивности от частоты при резонансе напряжений показана на рисунке 28, где U_0 – напряжение при резонансе.

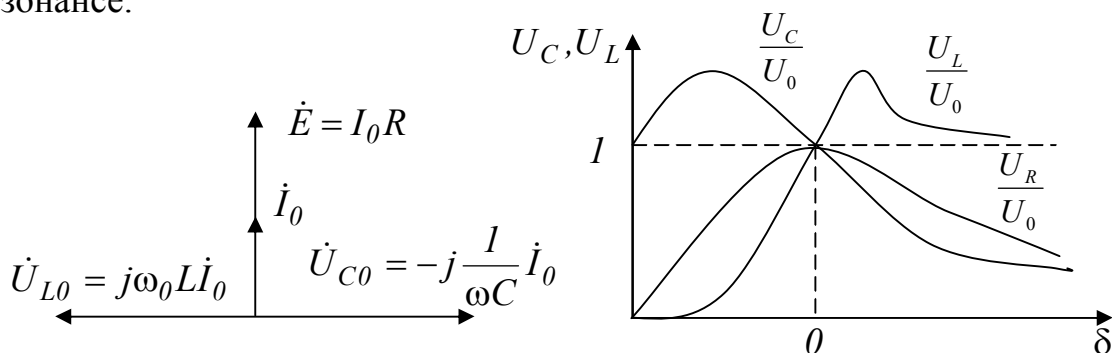


Рисунок 27 – Векторная диаграмма тока и напряжения при резонансе напряжений

Рисунок 28 – Зависимость напряжений на емкости и индуктивности от частоты

2 Параллельный колебательный контур. Резонанс токов

Рассмотрим параллельный колебательный контур, простейшим видом которого является параллельное соединение индуктивной катушки и конденсатора (рисунок 29).

Резонансом токов называют такой режим параллельного колебательного контура, при котором ток в неразветвленной части цепи совпадает по фазе с напряжением ($\varphi = 0$), а мощность, потребляемая из сети, равна активной мощности контура. Реактивная мощность при резонансе из сети не потребляется.

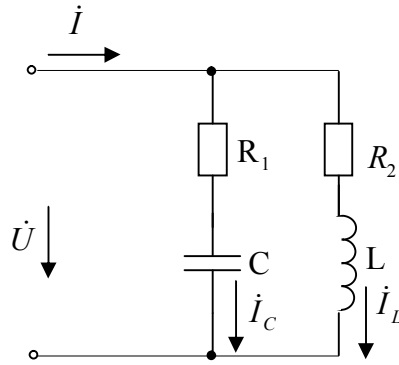


Рисунок 29 – Параллельный колебательный контур

При резонансе токов $b = b_L - b_C = 0$. При резонансе токов возможны ситуации, когда реактивные токи \dot{I}_L и \dot{I}_C намного превышают суммарный ток суммарный ток в цепи, вследствие, чего резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов. Это возможно при условии $g < b_L$ или $g < b_C$.

Определим резонансную частоту контура:

$$b = b_1 - b_2 = -\frac{1/(\omega_\rho C)}{R_1^2 + (1/\omega_\rho C)^2} + \frac{\omega_\rho L}{R_2^2 + (\omega_\rho L)^2} = 0.$$

После преобразования получаем

$$\frac{R_1^2 + (\omega_\rho L)^2}{L} = \frac{1 + R_2^2 (\omega_\rho C)^2}{C},$$

откуда $\omega_\rho = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_2^2}{L/C - R_1^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_2^2}{\rho^2 - R_1^2}}$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Как видно из выражения для резонансной частоты ω_ρ , резонанс токов возможен при одновременном выполнении условий $\rho > R_1$, $\rho > R_2$ или $\rho < R_1$ и $\rho < R_2$. Если эти условия не выполняются, то ω_ρ – линейное число. В случае, когда $R_1 = R_2$ $\omega_\rho = \omega_0$ при $R_1 = R_2 = \rho$; $\omega_\rho = 0/0$, т. е. резонанс токов наступает при любой частоте источника. При этом эквивалентное сопротивление контура не зависит от частоты.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(\rho + j\omega L)(\rho - j\frac{1}{\omega C})}{(2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}))} = \frac{\rho^2 [2 + j\frac{\omega L}{\rho} - \frac{1}{\rho\omega C}]}{\rho [2 + j(\frac{\omega L}{\rho} - \frac{1}{\rho\omega C})]} = \rho,$$

где j – комплексное число.

Следовательно, ток в неразветвленной части цепи не зависит от частоты. Если R_1 и R_2 – сопротивления, учитывающие потери реальных конденсаторов и индуктивной катушки ($R_1 = R_C$; $R_2 = R_L$), то как правило, $\rho \gg R_1$, $\rho \gg R_2$ при этом $\omega_\rho \approx \omega_0$.

В контуре без потерь ($R_1 = R_2 = 0$), $I = bU = 0$, токи I_L и I_C равны по величине и противоположны по фазе. Эквивалентные сопротивления контура с потерями

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R + jX},$$

где $X_1 = -\frac{1}{\omega C}$; $X_2 = \omega L$; $R = R_1 + R_2$; $X = X_1 + X_2$; j – комплексное число.

В идеальном случае, например в радиотехнических устройствах, где применяют контуры с малыми потерями, когда практически $R_1 = R_2 = 0$ (или они очень малы по сравнению с ρ), резонансную частоту можно определить, как и при резонансе в последовательном колебательном контуре, по формуле:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Частотные характеристики для резонанса тока изображены на рисунке 30.

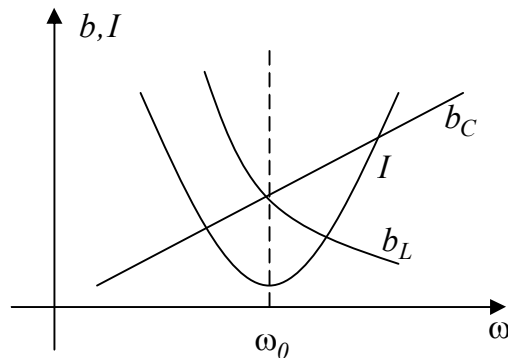


Рисунок 30 – Частотные характеристики для резонанса тока

3 Электрические фильтры

Чем выше добротность контура, тем уже его полоса пропускания и острее резонансная кривая. Острота резонансной кривой характеризует частотную избирательность колебательного контура, т.е. способность пропускать или задерживать электрические колебания только определенной частоты – резонансной или близко к ней. [1]

В различных электротехнических устройствах между источником энергии и приемником включают электрические фильтры в виде четырехполюсников или цепных схем, чтобы пропускать к приемнику только токи заданного диапазона частоты. Цепные схемы состоят из каскадно-включенных четырехполюсников, называемых звеньями. При этом выходные схемы каждого предыдущего звена соединяются с входными схемами последующего.

Электрический фильтр – пассивный четырехполюсник, пропускающий некоторую определенную полосу частот с малым затуханием, вне этой полосы частот затухание велико.

Полоса частот, при которых затухание мало называется полосой пропускания фильтра. Остальную область частот называют полосой задерживания или затухания.

Электрические фильтры классифицируются по:

- пропускаемым частотам: НЧ, ВЧ, полосные, заграждающие;
- схемам звеньев: Г, Т, П-образные, мостовые и т.п.;
- характеристикам: простейшие типа k , более высокого класса типа m ;
- типам элементов: реактивные (L и C), пьезоэлектрические (кварцевые пластины), безиндуктивные (R и C) и др.

Условием пропускания реактивного фильтра является наименьшее число элементов равное 2, т.е. это Г-образные фильтры.

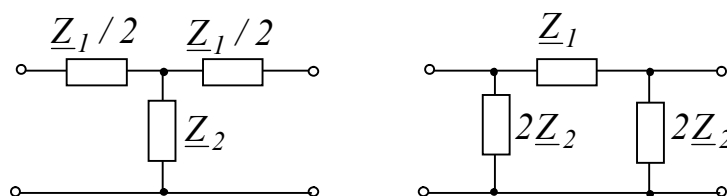
Для обратимого четырехполюсника справедливо $g = a + jb$, где g – коэффициент передачи или мера передачи (постоянная распространения), a – собственное затухание четырехполюсника, b – коэффициент фазы.

Фильтры обычно собирают по симметричной Т и П-образной схеме, которые в дальнейшем можно представить как комбинацию из Г-образных фильтров (рисунок 5.1).

В случае симметричного Т и П-образного фильтра коэффициент передачи A определяется

$$\underline{A} = chg = \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}; \quad sh \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}.$$

Полосой пропускания реактивного фильтра является область частот, при которой собственное затухание реактивного фильтра равно нулю ($a = 0$).



а)

б)

Рисунок 5.1 – Принципиальные схемы Т (а) и П (б) - образных фильтров

Для любого симметричного реактивного фильтра в полосе пропускания, т.е. при $a = 0$:

$$A(\omega) = chg = ch(a + jb) = ch(jb) = \cos b.$$

Частота, являющаяся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называется частотой среза.

Характер изменения угла b для зоны прозрачности $b = \arccos A(\omega)$.

В полосе затухания $a > 0$, $b = 0$, т.е. при $b = 0$ и при $b = \pm \pi$. При $b = 0$, $ch a = A(\omega)$, а при $b = \pm \pi$, $ch a = -A(\omega)$.

С изменением частоты ω изменяются коэффициенты B и C четырехполюсника, поэтому меняется характеристическое сопротивление

$$Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}}.$$

Для того, чтобы фильтр работал на согласованную нагрузку, при изменении частоты нужно изменять и сопротивление нагрузки.

В полосе прозрачности характеристическое сопротивление фильтра всегда активное, а в полосе затухания – чисто реактивное.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление представляет собой некоторое постоянное для данного фильтра число k , не зависящее от частоты, называют фильтрами типа k . Фильтры, в которых это произведение зависит от частоты, называются фильтрами типа m .

Во избежание получения громоздких фильтров с низкой добротностью катушек применяют безындукционные фильтры (RC), состоящие из активных сопротивлений и емкостей. RC -фильтры также используют в случае когда сопротивление нагрузки, на которую включен фильтр, очень велико, т. е. теоретически стремиться к бесконечности. На рисунке 5.6 показан RC -фильтра нижних частот (ФНЧ) и его векторная диаграмма.

При низких частотах, когда емкостное сопротивление велико, напряжение на выходе фильтра немного меньше напряжения на его входе и, следовательно, затухание мало. С повышением частоты емкостное сопротивление убывает, напряжение на выходе уменьшается и, следовательно, затухание возрастает.

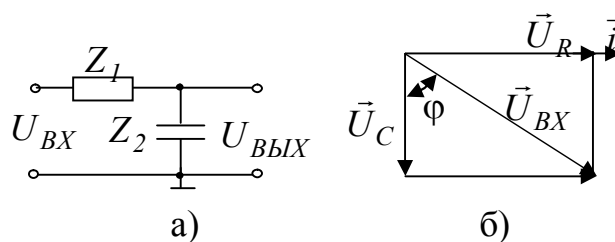


Рисунок 5.6 – Принципиальная схема RC - фильтра нижних частот (ФНЧ) и его векторная диаграмма

Комплексный коэффициент передачи напряжения такого фильтра при $Z_1 = R$ и $Z_2 = 1 / j\omega C$ можно представить в виде

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{BYX}}{\dot{U}_{BX}} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} = a + jb \quad (5.1)$$

При этом модуль коэффициента передачи выражения (5.1) или другими словами амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра будет иметь вид

$$K = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{I}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} = \frac{I}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (5.2)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени фильтра.

Фазовый сдвиг между напряжением на выходе и входным напряжением или фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра определяется выражением

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-\omega RC) = \operatorname{arctg}(-2\pi f RC) = \operatorname{arctg}(-2\pi f \tau). \quad (5.3)$$

Граничная частота (частота среза) определяется по уровню, при котором модуль коэффициента передачи K уменьшается в $1/\sqrt{2}$ раз от своего максимального значения. С учетом сказанного выражение (5.2) дает для граничной частоты

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \text{ или } f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (5.4)$$

Для RC - фильтров не наблюдается резкого перехода от полосы прозрачности к полосе задержки.

Принципиальная схема RC -фильтра верхних частот (ФВЧ) и его векторная диаграмма приведены на рисунке 5.7.

При низких частотах, когда емкостное сопротивление велико, напряжение на выходе фильтра мало, т. е. получается большое затухание. С увеличением частоты емкостное сопротивление уменьшается, и напряжение на выходе возрастает, т. е. затухание убывает.

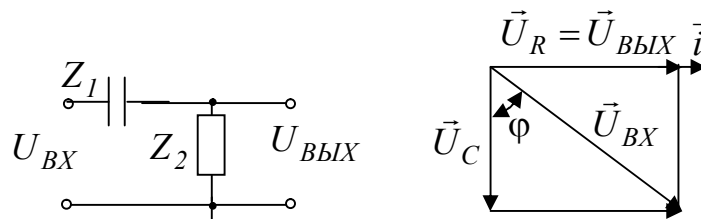


Рисунок 5.7 – Принципиальная схема RC -фильтра верхних частот (ФВЧ) и его векторная диаграмма

Комплексный коэффициент передачи ФВЧ по напряжению $\underline{Z}_1 = 1/j\omega C$ и $\underline{Z}_2 = R$ имеет вид

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{BYX}}{\dot{U}_{BX}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} + j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}. \quad (5.5)$$

АЧХ и ФЧХ такого фильтра, как следует из соотношения (5.5), выражаются формулами

$$K = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{2\pi f RC}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} \quad (5.6)$$

$$\varphi = \arctg \frac{1}{\omega RC} = \arctg \frac{1}{2\pi f RC} \quad (5.7)$$

Граничная частота RC -фильтра верхних частот определяется аналогично граничной частоте фильтра нижних частот

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \text{ или } f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Полосовой RC -фильтр может быть образован путем последовательности соединения RC -фильтров нижних и верхних частот (рисунок 5.8, а). Векторная диаграмма такого фильтра показана на рисунке 5.8, б.

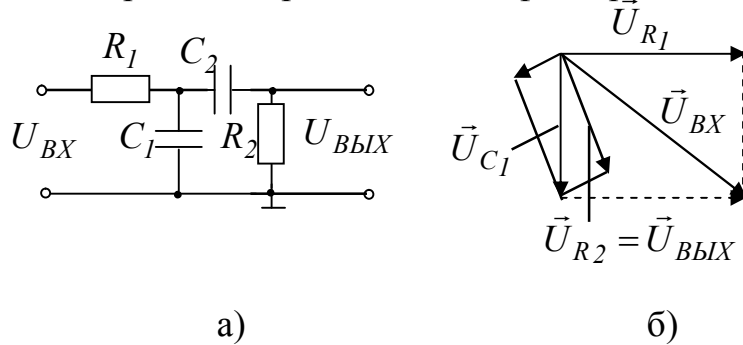


Рисунок 5.8 – Принципиальная схема полосового RC -фильтра (а) и его векторная диаграмма (б)

В полосовом фильтре первое звено (ФНЧ) не пропускает колебаний высоких частот, а второе звено (ФВЧ) не пропускает колебаний низких частот. Где-то в области перехода от полосы прозрачности к полосе задержки обоих звеньев и лежит максимальное значение коэффициента передачи фильтра.

Выражение для коэффициента передачи по напряжению для полосового фильтра при $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$ имеет вид

$$K = \frac{\dot{U}_{ВЫХ}}{\dot{U}_{ВХ}} = \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} \quad (5.8)$$

Из соотношения (5.8) для модуля коэффициента передачи (АЧХ) полосового фильтра следует

$$K = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega RC - \frac{1}{\omega RC})^2}} \quad (5.9)$$

Максимальная величина модуля коэффициента передачи выражения (5.9) наблюдается при $\omega_p RC - \frac{1}{\omega_p RC} = 0$ и принимает значение

$$K_p = 1/3 \quad (5.10)$$

АЧХ полосового фильтра напоминает резонансную кривую колебательного контура. Поэтому, соответствующую частоту называют квазирезонансной. Ее значение может быть получено из выражения (5.9) с учетом соотношения (5.10)

$$\omega_P = \frac{1}{RC} \text{ или } f_P = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (5.11)$$

Заграждающий RC-фильтр часто называют двойным T-образным мостом. Он представляет собой параллельное соединение T-образных фильтров верхних и нижних частот (рисунок 5.9, а).

Качественно работу заграждающего фильтра можно объяснить, перерисовав схему более наглядно, как показано на рисунке 5.9, б).

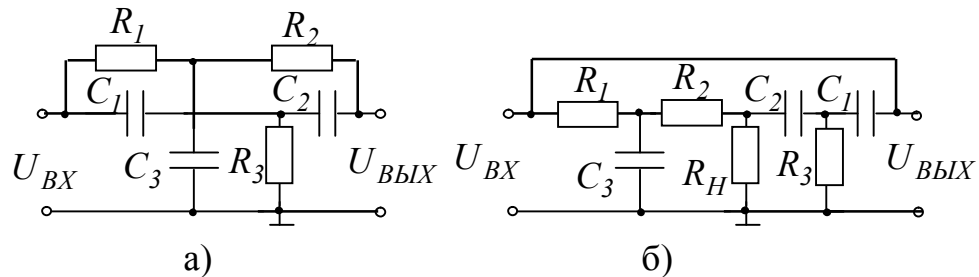


Рисунок 5.9 – Принципиальная схема заграждающего RC-фильтра

В данном случае считается, что сопротивление нагрузки R_H не влияет на работу фильтра, т. е. R_H имеет достаточно большую величину. Слева и справа подведено переменное входное напряжение от одного и того же источника сигнала. В этом случае можно заметить, что при $\omega \rightarrow 0$ $K \rightarrow 1$ и при $\omega \rightarrow \infty$ $K \rightarrow 1$. Это означает, что в области нулевой частоты и бесконечно больших частот коэффициент передачи фильтра равен 1. Векторные диаграммы для левой и правой части преобразованной схемы приведены на рисунке 5.10 а), б). Если направить векторы напряжений $\vec{U}_{R_H} = \vec{U}'_{B_YX}$ и $\vec{U}_{R_H} = \vec{U}''_{B_YX}$ из одной точки (рисунок 5.10, в), то видно, что они при определенной частоте сигнала могут быть равны друг другу по величине и противоположны по фазе. На этой частоте, называемой так же, как и в случае полосового фильтра, квазирезонансной, коэффициент передачи фильтра будет равен нулю, а фаза меняется скачком на π . Если в рассматриваемом заграждающем фильтре положить $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, $R_3 = R/2$ и $C_3 = 2C$, то выражение для его АЧХ и ФЧХ будет иметь соответственно вид

$$K = \frac{1 - (\omega RC)^2}{\sqrt{[1 - (\omega RC)^2]^2 + 16(\omega RC)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{4\omega RC}{(\omega RC)^2 - 1}, \quad (5.12)$$

а значение для квазирезонансной частоты будет равно

$$\omega_P = \frac{1}{RC} \text{ или } f_P = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (5.13)$$

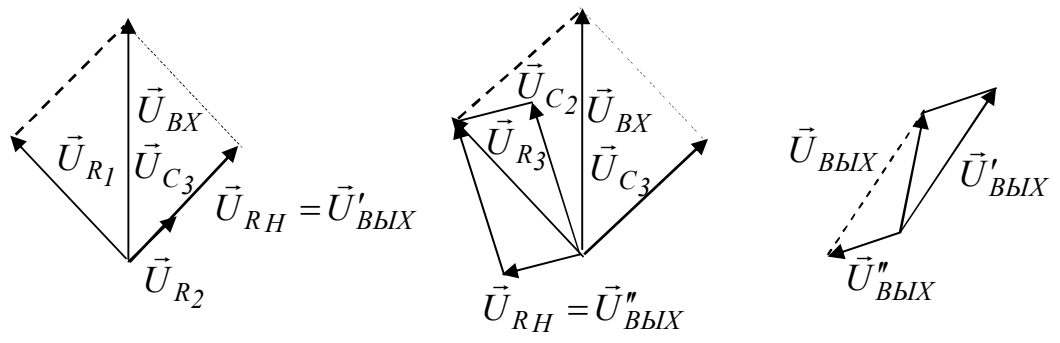


Рисунок 5.10 – Векторные диаграммы заграждающего RC-фильтра