Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (102), 2017

УДК 517.538.52+517.538.53

Об асимптотике многочленов Эрмита-Паде экспоненциальных функций

Е.П. КЕЧКО

Изучается асимптотика многочленов Эрмита-Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\xi_p z}\}_{p=0}^{k}$, где $\{\xi_p\}_{p=0}^{k}$ – комплексные числа, расположенные на произвольной прямой в комплексной области. Доказанные теоремы дополняют и обобщают известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, А.П. Старовойтова и А.В. Астафьевой.
Ключевые слова: система экспонент, многочлены Эрмита-Паде, асимптотика многочленов Эрмита-Паде.

In this paper we have derived asymptotics of Hermite-Padé I type polynomials for the exponential system $\{e^{\xi_p z}\}_{p=0}^{k}$, where $\{\xi_p\}_{p=0}^{k}$ are complex numbers, located on an arbitrary line in the complex domain. The proven theorems complement and generalize known results by P. Borwein, F. Wielonsky, A.P. Starovoitov and A.V. Astafieva.
Keywords: exponential system, Hermite-Padé polynomials, asymptotic Hermite-Padé polynomials.

Введение. В работе Эрмита [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e, были введены в рассмотрение рациональные функции

$$\pi_{n,n}^{j}(z;e^{j\xi})=\frac{P_n^j(z)}{Q_n(z)},\quad j=1,2,\ldots,k,$$

где многочлены $Q_n(z)$, $P_n^j(z)$ имеют степени не выше kn и определяются из равенств

$$Q_n(z)e^{jz}-P_n^j(z)=O(z^{kn+n-1}),\quad j=1,2,\ldots,k. \tag{1}$$

В современной терминологии многочлены $\{Q_n(z),\ P_n^j(z)\}_{j=1}^{k}$ называются диагональными многочленами Эрмита-Паде 2-го рода, а дроби $\{\pi_{n,n}^{j}(z;e^{j\xi})\}_{j=1}^{k}$ – аппроксимациями Эрмита-Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^{k}$.

Позже Эрмит [2] определил многочлены $A_0(z),A_1(z),\ldots,A_k(z)$ степени не выше $n-1$, которые тождественно не равны нулю и удовлетворяют условию

$$\sum_{p=0}^{k}A_p(z)e^{pz}=O(z^{kn+n-1}),\quad z\to 0. \tag{2}$$

Многочлены $\{A_p(z)\}_{p=0}^{k}$ принято называть диагональными многочленами Эрмита-Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$.

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде [3], а построенные в обоих случаях многочлены выражаются друг через друга:

$$A_0(z)=-P_{n-1}^1(z),\ A_1(z)=Q_{n-1}(z).$$

Теорема Паде утверждает, что если нормировать многочлены так, чтобы $A_1(0)=1$, то при $n\to\infty$ локально равномерно по $z\in\mathbb{C}$, т. е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z)=-e^{z/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ A_1(z)=e^{z/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения свойств многочленов Эрмита-Паде 1-го и 2-го рода для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [4], [5]. Оба типа многочленов, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений в различных областях анализа (см. [6]–[8]).

В работе [9] П. Борвейн нашел асимптотику квадратичных диагональных многочленов Эрмита-Паде для системы экспонент $1, e^{z}, e^{2z}$. Ф. Вилонский [10] получил аналогичный результат для системы экспонент $e^{pz}\,{}_{p=0}^{k}$ при произвольном k. В работе [11] найдена асимптотика диагональных многочленов Эрмита-Паде в случае системы экспонент $e^{\lambda_p z}\,{}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными отличными от нуля числами $\lambda_p\,{}_{p=0}^{k}$, которые принадлежат действительной прямой.

В данной работе изучается асимптотика диагональных многочленов Эрмита-Паде для системы экспонент $e^{\lambda_p z}\,{}_{p=0}^{k}$ в случае, когда числа $\lambda_p\,{}_{p=0}^{k}$ лежат на произвольной прямой комплексной плоскости.

Предварительные результаты. Полиномы $A_n^p(z)\,{}_{p=0}^{k}$, удовлетворяющие равенствам (2), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{\xi z}\,d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n},\ 0 \leq p \leq k, \tag{3}$$

где $\varphi(\xi) = (\xi-\lambda_0)(\xi-\lambda_1)\cdots(\xi-\lambda_k)$ удовлетворяют (2) и всем другим условиям. Равенства (3) не являются новыми и, по всей видимости, было известно ещё Эрмиту (см. [1], [2]).

Далее при изучении асимптотики полиномов (3) будем использовать известный метод комплексного анализа. Приведем без доказательства в удобном для нас виде необходимую лемму [12, с. 415].

Лемма (метод перевала). *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой односвязной области* G, *содержащей кусочно гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi)e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Предположим, что $\max\limits_{\xi\in\gamma} S(\xi)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура* γ *и простой точкой перевала, т.е.* $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)\neq 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора (см. [12, с. 414]), в которых* $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. *Тогда при* $n\to\infty$ *и* $f(z_0)\neq 0$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}\,e^{nS(z_0)}\left(f(z_0)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4}$$

Выбор ветви корня в (4) определяется из условий

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 *– угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l *– линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0*, т. е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:* $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $z \neq z_0$.

Асимптотика многочленов Эрмита-Паде экспоненциальных функций. Рассмотрим полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$, удовлетворяющие равенству (3), где $\lambda_p = e^{i\alpha}\lambda_p + b$, $p = 0,1,\ldots,k$, $b \in \mathbb{C}$, а $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ – произвольные различные действительные числа занумерованные так, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$. Если сделать замену $\xi = e^{i\alpha}\tau + b$ в равенстве (3), то получим

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_p} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z}\, d\tau}{(\varphi(\tau))^n},\ 0 \le p \le k,$$

где $\varphi(\tau) = (\tau - \lambda_0)(\tau - \lambda_1)\cdots(\tau - \lambda_k)$.

Перейдем к изучению асимптотики полиномов $A_n^p(z)$, $0 \le p \le k$. Для этого введем необходимые обозначения. Пусть x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ нули функции $\varphi(\tau)$, т. е. $\varphi'(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Ясно, что x_j – действительные числа и $x_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^{k} \subset G \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$. Тогда (см. [12]) функция

$$S(\tau) = -\ln \varphi(\tau),$$

где

$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)|, \text{ если } \varphi(x_1) > 0,$$
$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)| - i\pi, \text{ если } \varphi(x_1) < 0,$$

является однозначной аналитической функцией в G. Значение функции $S(\tau)$ вычисляется по формуле

$$S(\tau) = -\ln|\varphi(\tau)| - i\left[\operatorname{Im} S(x_1) + \Delta_\gamma \arg \varphi(\tau)\right],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и τ, а $\Delta_\gamma \arg \varphi(\tau)$ – приращение аргумента $\varphi(\tau)$ вдоль кривой γ.

Если $\tau \in G$, то справедливы равенства

$$S'(\tau) = -\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = -\frac{1}{\tau - \lambda_0} - \frac{1}{\tau - \lambda_1} - \cdots - \frac{1}{\tau - \lambda_k},$$

$$S''(\tau) = -\frac{\varphi''(\tau)\varphi(\tau) - [\varphi'(\tau)]^2}{[\varphi(\tau)]^2} = \frac{1}{(\tau - \lambda_0)^2} + \frac{1}{(\tau - \lambda_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\tau - \lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j) = 0$,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_j)}}\, e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Теорема 1. *Пусть* $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$ *многочлены Эрмита-Паде 1-го рода для системы экспонент* $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$*. Тогда для каждого фиксированного* $z \in \mathbb{C}$ *и* $n \to \infty$

$$A_n^0(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha}(x_1 - \lambda_0)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5}$$

$$A_n^p(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_{p+1}) e^{e^{i\alpha}(x_{p+1}-\lambda_p)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_p) e^{e^{i\alpha}(x_p-\lambda_p)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ p=\overline{1,k-1}, \tag{6}$$

$$A_n^k(z) = -\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_k) e^{e^{i\alpha}(x_k-\lambda_k)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7}$$

Доказательство. Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $\lambda_0 = 0$. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_0} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{\varphi(\tau)^{\ n}}, \tag{8}$$

докажем равенство (5) для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. Для этого в интеграле (8) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий полуплоскости $z: -\infty < \operatorname{Re} z < \lambda_1$, с вершинами в точках $A(-a',-r)$, $B(-a',r)$, $C(a,r)$, $D(a,-r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a \in (0,\lambda_1)$, $a' > 0$. Так как

$$\left|\varphi(a+ir)\right| = \prod_{j=0}^{k}\sqrt{(a-\lambda_j)^2+t^2} > \left|\varphi(a)\right|,\ t\in[-r,r]\setminus\{0\},$$

то на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B, минимум функции $\left|\varphi(\tau)\right|$ достигается в единственной точке $-a'$. Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D, минимум функции $\left|\varphi(\tau)\right|$ достигается в единственной точке a. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $\left|\varphi(\tau)\right|$ больше каждого из значений $\left|\varphi(\tau)\right|$ в точках $-a'$ и a. Действительно, если только $r > 2\max\{a',\lambda_k\}$, то при $t\in[-a',a]$

$$\left|\varphi(t+ir)\right| = \prod_{j=0}^{k}\sqrt{(t-\lambda_j)^2+t^2} > \max\ \left|\varphi(a)\right|,\left|\varphi(-a')\right|\ .$$

Определимся теперь с выбором a' и a. Положим $a = x_1$, а a' возьмём таким, чтобы $\left|\varphi(-a')\right| > \left|\varphi(a)\right|$. Такой выбор возможен, так как $\left|\varphi(t)\right| \to +\infty$ при $t\in\mathbb{R}$ и $t\to-\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L,N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L,N]}(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{[L,N]} \frac{e^{e^{i\alpha}\tau z} d\tau}{\varphi(\tau)^{\ n}}.$$

Область G можно выбрать так, что $[D,C]\subset G$. Поэтому

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{[D,C]} e^{e^{i\alpha}\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau .$$

В силу выбора точки a максимум функции $\operatorname{Re} S(\tau)$ на отрезке $[D,C]$ достигается в единственной точке x_1, которая является простой точкой перевала. Поэтому нахождение асимптотики интеграла $F_n^{[D,C]}(z)$ можно применить метод перевала (лемма). Тогда

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{e^{i\alpha}x_1 z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{9}$$

Выбираем ветвь корня в (9) с учётом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n\to\infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1) e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{10}$$

Применяя к интегралу $F_n^{[B,A]}(z)$ аналогичные рассуждения и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеем место оценка

$$\left|F_n^{[B,A]}(z)\right| \le \theta \left|e^{n(S(x_1)-\delta)}\right|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n\to\infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}(z)$, $F_n^{[A,D]}(z)$. Значит, основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D,C]$. Поэтому из (10) следует справедливость равенства (5) для любого фиксированного $z\in\mathbb{C}$.

Равенство (7) доказывает аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учётом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (6). Зафиксируем произвольное $z\in\mathbb{C}$ и представим многочлен $A_n^p(z)$ в виде

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \int_{C_p} e^{e^{i\alpha}\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau, \quad p=\overline{1,k-1}. \tag{11}$$

В интеграле (11) деформируем контур интегрирования C_p в прямоугольник R', принадлежащий области $z:\lambda_{p-1} < \operatorname{Re} z < \lambda_{p+1}$ с вершинами в точках $A^*(a',-r)$, $B^*(a',r)$, $C^*(a,r)$, $D^*(a,-r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a' \in \lambda_{p-1},\lambda_p$, $a\in \lambda_p,\lambda_{p+1}$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем B^* и A^*, минимум функции $|\varphi(\tau)|$ достигается в единственной точке a', а на отрезке $\left[D^*,C^*\right]$ он достигается в единственной точке a. При достаточно большом r ($r>2\lambda_k$) значения $|\varphi(\tau)|$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $\left[C^*,B^*\right]$ и $\left[A^*,D^*\right]$ больше каждого из значений $|\varphi(\tau)|$ в точках a' и a. Если положить $a'=x_p$, а $a=x_{p+1}$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику A_n^p будут вносить интегралы по отрезкам $\left[B^*,A^*\right]$ и $\left[D^*,C^*\right]$. Применив к ним предыдущие рассуждения, получим, что при $n\to\infty$

$$F_n^{[D^*,C^*]}(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_{p+1})}} e^{nS(x_{p+1})} e^{e^{i\alpha}x_{p+1}z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{12}$$

$$F_n^{[B^*,A^*]}(z) = \frac{e^{-e^{i\alpha}\lambda_p z}}{2\pi i e^{i(kn+n-1)\alpha}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}} e^{nS(x_p)} e^{e^{i\alpha}x_p z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{13}$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (12) $\varphi_0=\pi/2$, а при выборе ветви корня в (13) $\varphi_0=-\pi/2$. С учётом этого, из (12) и (13) следует равенство (6). Таким образом, для каждого фиксированного z асимптотические равенства (5)–(7) доказаны.

Следствие 1. *При* $n\to\infty$

$$A_n^0(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_1)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^p(0) = \frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}} B_n(x_{p+1})\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}}B_n(x_p)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ p=\overline{1,k-1},$$

$$A_n^k(z)=-\frac{1}{e^{i(kn+n-1)\alpha}}B_n(x_k)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Пример. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{2}$ с различными произвольными комплексными множителями в показателях степеней, где $\lambda_p = e^{i\alpha}\lambda_p + b$, $p = 0,1,2$, $b \in \mathbb{C}$, $\{\lambda_p\}_{p=0}^{2}$ – набор произвольных различных действительных чисел таких, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Введем обозначения

$$p=\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_0\lambda_1-\lambda_0\lambda_2-\lambda_1\lambda_2}\,,$$

$$h=(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^2-3(\lambda_0^3+\lambda_1^3+\lambda_2^3+6\lambda_0\lambda_1\lambda_2)\,.$$

Проводя несложные вычисления, приходим к равенствам

$$x_1=\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-p}{3},\ x_2=\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+p}{3},$$

$$\varphi(x_1)=\frac{h+2p^3}{27},\ \varphi(x_2)=\frac{h-2p^3}{27},$$

$$S''(x_1)=\frac{54p}{h+2p^3},\ S''(x_2)=\frac{54p}{h-2p^3}.$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *При* $n\to\infty$

$$A_n^0(z)=\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_1)e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_0)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^1(z)=\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_2)e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_1)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_1)e^{e^{i\alpha}(x_1-\lambda_1)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^2(z)=-\frac{1}{e^{i(3n-1)\alpha}}B_n(x_2)e^{e^{i\alpha}(x_2-\lambda_2)z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Положим

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=1+\varepsilon,\ 0<\varepsilon\le 1,$$

тогда

$$\lambda_0=b,\ \lambda_1=e^{i\alpha}+b,\ \lambda_2=e^{i\alpha}(1+\varepsilon)+b,\ 0<\varepsilon\le 1,\ b\in\mathbb{C}\,.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$A_n^0(z)\sim\frac{1}{e^{i(3n-2)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3+h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3+h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(2+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^1(z)\sim\frac{(-1)^n}{e^{i(3n-2)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3-h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3-h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1+\varepsilon+p)z/3}-$$

$$-\frac{1}{e^{i(3n-2)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3+h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3+h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^2(z)\sim\frac{(-1)^{n-1}}{e^{i(3n-2)\alpha}}\sqrt{\frac{2p^3-h}{108\pi pn}}\left(\frac{27}{2p^3-h}\right)^n e^{e^{i\alpha}(-1-2\varepsilon+p)z/3}.$$

При $\varepsilon=1$ и $\alpha=0$ из теоремы 1 получим асимптотические равенства, которые согласуются с соответствующими утверждениями из работ [9], [10] и [11]:

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z},$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n \ e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}} \quad ,$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Литература

1. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci.(Paris) – 1873. – V. 77. – P. 18–293.

2. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – V. 21. – P. 289–308.

3. Padé, H. Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques / H. Padé // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – V. 16, № 3. – P. 394–426.

4. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – V. 166. – P. 118–150.

5. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – V. 168. – P. 200–227.

6. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York/Berlin : Springer-Verlag, 1992. – P. 127–167.

7. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

8. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

9. Borwein, P.B. Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – V. 62. – P. 291–302.

10. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90, № 2. – P. 283–298.

11. Астафьева, А.В. Аппроксимации Эрмита-Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

12. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 480 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 14.04.2017